أكاديمية الجهة الشرقية نيابة وجدة	مـادة الـريـاضـيـات	المستوى : الأولى باك علوم تجريبية الأستاذ : عثماني نجيب مذكـرة رقـم /2

مذكرة رقم 2 في درس عموميات حول الدوال

الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس :

ـ الدالة المكبورة، الدالة المصغورة؛ الدالة المحدودة؛ الدالة الدورية؛ ـ مقارنة دالتين؛ التأويل الهندسي؛ ـ مطاريف دالة؛ ـ رتابة دالة عددية؛ ـ تركيب دالتين عدديتين؛ ـ رتابة مركب دالتين رتيبتين؛ ـ التمثيل المبياني للدالتين: $x \to \sqrt{x+a}$ و $x \to ax^3$؛	ـ مقارنة تعبيرين باستعمال مختلف التقنيات؛ ـ استنتاج تغيرات دالة أو القيم القصوية والدنوية لدالة انطلاقا من تمثيلها المبياني أو من جدول تغيراتها؛ ـ التعرف على تغيرات الدوال من الشكل $f+\lambda$ و λf انطلاقا من تغيرات الدالة f؛ ـ استعمال التمثيل المبياني لدالة أو جدول تغيراتها لتحديد صورة مجال ولحل بعض المعادلات والمتراجحات؛ ـ تحديد تغيرات gof انطلاقا من تغيرات g و f.	ـ ينبغي تعويد التلاميذ على استنتاج تغيرات دالة عددية انطلاقا من تمثيلها المبياني. كما ينبغي الاهتمام بإنشاء المنحنيات؛ ـ ينبغي تناول الحل المبياني لمعادلات ومتراجحات من النوع $f(x)=c$ و $f(x)\le c$ و $f(x)\le g(x)$ و $f(x)=g(x)$ و $f(x)<g(x)$ ـ يمكن في حدود الإمكان؛ استعمال الآلات الحاسبة والبرانم المعلوماتية المدمجة في الحاسوب والتي تمكن من دراسة الدوال؛ ـ يستحسن معالجة وضعيات مختارة تنطلق من ميادين أخرى.

I. مجموعة تعريف دالة عددية"تذكير"

أمثلة: حدد مجموعة تعريف الدوال المعرفة كالتالي :

1) $f(x)=2x^3+x+3$ 2) $g(x)=\dfrac{3x+1}{2x^2-x-1}$ 3) $h(x)=\sqrt{2x^2-x-1}$

أجوبة: 1) $f(x)=2x^3+x+3$

يعني $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

2) $g(x)=\dfrac{3x+1}{2x^2-x-1}$ يعني $D_g=\{x\in\mathbb{R}/2x^2-x-1\neq 0\}$

$2x^2-x-1=0$ نحل المعادلة باستعمال المميز

$a=2$ و $b=-1$ و $c=-1$

$$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\times2\times(-1)=1+8=9=(3)^2>0$$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ و } x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1=\frac{-(-1)+\sqrt{9}}{2\times2}=\frac{1+3}{4}=\frac{4}{4}=1 \text{ و } x_2=\frac{1-3}{2\times2}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$$

ومنه: $D_g=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2};1\right\}$

3) $h(x)=\sqrt{2x^2-x-1}$ $D_h=\{x\in\mathbb{R}/2x^2-x-1\geq 0\}$

$x_1=1$ و $x_2=-\frac{1}{2}$ نحدد جدول الاشارة :

x	$-\infty$		$-1/2$		1		$+\infty$
$2x^2-x-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ومنه : $D_h=\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty[$

تمرين1: حدد مجموعة تعريف الدوال المعرفة كالتالي:

1) $f(x)=\dfrac{|x|(2x+1)}{x(2x^2+x-3)}$ 2) $g(x)=\dfrac{4x+1}{x^2+x+1}$ 3) $h(x)=\dfrac{x^2+x-3}{2|x|-1}$

4) $A(x)=\dfrac{x^2-3}{4|x|+2}$ 5) $B(x)=\dfrac{x^2-3}{|x-1|-|x+1|}$ 6) $C(x)=\sqrt{3-x^2}$

أجوبة: 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x(2x^2+x-3)\neq 0\}$

$x(2x^2+x-3)=0 \Leftrightarrow x=0$ أو $2x^2+x-3=0$

$2x^2+x-3=0$ نحل المعادلة باستعمال المميز

$a=2$ و $b=1$ و $c=-3$

$$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\times2\times(-3)=1+24=25=(5)^2>0$$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ و } x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{25}}{2\times2}=\frac{-1+5}{4}=\frac{4}{4}=1 \text{ و } x_2=\frac{-1-5}{2\times2}=\frac{-6}{4}=-\frac{3}{2}$$

ومنه: $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{3}{2};0;1\right\}$

2) $D_g=\{x\in\mathbb{R}/x^2+x+1\neq 0\}$

$$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\times1\times1=1-4=-3<0$$

ومنه المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$

وبالتالي : $D_f=\mathbb{R}$

3) $D_h=\{x\in\mathbb{R}/2|x|-1\neq 0\}$

$2|x|-1=0 \Leftrightarrow |x|=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ أو $x=-\frac{1}{2}$

ومنه: $D_h=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$

4) $D_A=\{x\in\mathbb{R}/4|x|+2\neq 0\}$

$4|x|+2=0 \Leftrightarrow |x|=-\frac{1}{2}$

وهذه المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$ ومنه: $D_A=\mathbb{R}$

5) $D_B=\{x\in\mathbb{R}/|x-1|-|x+1|\neq 0\}$

$|x-1|-|x+1|=0 \Leftrightarrow |x-1|=|x+1|$

ومنه: $\Leftrightarrow x-1=x+1$ أو $x-1=-(x+1)$

$x=0 \Leftrightarrow -1=1$ أو $2x=0$

$D_B=\mathbb{R}-\{0\}=\mathbb{R}^*$

6) $C(x)=\sqrt{3-x^2}$ $D_C=\{x\in\mathbb{R}/3-x^2\geq 0\}$

$3-x^2=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{3}\right)^2-x^2=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{3}-x\right)\left(\sqrt{3}+x\right)=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}-x=0$ أو $\sqrt{3}+x=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{3}$ أو $x=-\sqrt{3}$

نحدد جدول الاشارة :

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$	$+\infty$
$3-x2$	$-$	0	$+$	0	$-$

ومنه : $D_C=\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$

II. الدالة المكبورة و الدالة المصغورة و الدالة المحدودة

نشاط : نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f
2. بين أن: $\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)\leq 1$
3. بين أن: $\forall x\in\mathbb{R}\quad 0\leq f(x)$
4. ماذا تستنتج؟ماذا نقول عن الدالة f ؟

الأجوبة: 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+1\neq 0\}$

$x^2=-1\Leftrightarrow x^2+1=0$ و هذه المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$

$D_f=\mathbb{R}$

2) نعلم أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ x^2\geq 0$

اذن: $x^2+1\geq 0+1$ يعني $x^2+1\geq 1$

يعني $\dfrac{1}{x^2+1}\leq 1\Leftrightarrow f(x)\leq 1\ \forall x\in\mathbb{R}$

نقول f دالة مكبورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 1

سؤال: هل الدالة f مكبورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 2؟ نعم

3) نعلم أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ x^2\geq 0$

اذن: $x^2+1\geq 0+1$ يعني $x^2+1\geq 1$

يعني $\forall x\in\mathbb{R}\ 0\leq f(x)$

نقول f دالة مصغورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 0

سؤال: هل الدالة f مصغورة على $\mathbb{R}$ بالعدد -1؟ نعم

4)نستنتج أن: $\forall x\in\mathbb{R}\ 0\leq f(x)\leq 1$

اذن : f مكبورة و مصغورة على $\mathbb{R}$ نقول f دالة محدودة على $\mathbb{R}$

1. تعريف

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$.

• نقول إن f دالة مكبورة على مجال I إذا وجد عدد حقيقي M بحيث : $\forall x\in I\quad f(x)\leq M$

• نقول إن f دالة مصغورة على مجال I إذا وجد عدد حقيقي m بحيث : $\forall x\in I\quad f(x)\geq m$

• نقول إن f دالة محدودة على مجال I إذا كانت مكبورة و مصغورة على المجال I.

2. خاصية:

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$.تكون f دالة محدودة على المجال I إذا وجد عدد حقيقي k بحيث : $\forall x\in I\quad |f(x)|\leq k$

تمرين2: حدد من بين الدوال f التالية الدوال المكبورة و المصغورة و المحدودة

1. $f(x)=|x|+6$ $\quad I=\mathbb{R}$
2. $f(x)=2\cos x+1$ $\quad I=\mathbb{R}$
3. $f(x)=-x^4-4$ $\quad I=\mathbb{R}$
4. $f(x)=\sqrt{x}+6$ $\quad I=\mathbb{R}^+$
5. $f(x)=\sin x-2$ $\quad I=\mathbb{R}$

الأجوبة: 1) نعلم أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ |x|\geq 0$

اذن: $|x|+6\geq 0+6$ يعني $|x|+6\geq 6$

أي $\forall x\in\mathbb{R}\ 6\leq f(x)$

اذن f دالة مصغورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 6

2) نعلم أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ -1\leq\cos x\leq 1$

اذن: $-2\leq 2\cos x\leq 2$ يعني $-2+1\leq 2\cos x+1\leq 2+1$

يعني $\forall x\in\mathbb{R}\ -1\leq f(x)\leq 3$

اذن: f دالة محدودة على $\mathbb{R}$

3) نعلم أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ x^4\geq 0$ يعني $-x^4\leq 0$ يعني $-x^4-4\leq 0-4$

يعني $f(x)\leq -4$ ومنه f مكبورة على $\mathbb{R}$ بالعدد -4

4) نعلم أن : $\forall x\in\mathbb{R}^+\ \sqrt{x}\geq 0$ يعني $\sqrt{x}+6\geq 0+6$

يعني $6\leq f(x)$ ومنه f مصغورة على $I=\mathbb{R}^+$ بالعدد 6

5) نعلم أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ -1\leq\sin x\leq 1$

اذن: $-1-2\leq\sin x-2\leq 1-2$ يعني $-3\leq\sin x-2\leq -1$

يعني $\forall x\in\mathbb{R}\ -3\leq f(x)\leq -1$

اذن: f دالة محدودة على $\mathbb{R}$

تمرين3: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=x^2-2x+5$

بين أن الدالة f مصغورة بالعدد 4

الجواب : يكفي أن نبين أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ 4\leq f(x)$

اذن نحسب الفرق : $f(x)-4=x^2-2x+5-4=x^2-2x+1=(x-1)^2\geq 0$

ومنه : $\forall x\in\mathbb{R}\ 4\leq f(x)$

وبالتالي f مصغورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 4

تمرين4: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=-2x^2+4x+1$

بين أن الدالة f مكبورة بالعدد 3

الجواب : يكفي أن نبين أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)\leq 3$

اذن نحسب الفرق : $3-f(x)=3-(-2x^2+4x+1)=3+2x^2-4x-1$

$3-f(x)=2x^2-4x+2=2(x^2-2x+1)=2(x-1)^2\geq 0$

ومنه : $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)\leq 3$

وبالتالي f مكبورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 3

تمرين5: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=\dfrac{5+4x^4}{x^4+1}$

بين أن الدالة f مصغورة بالعدد 4

الجواب : يكفي أن نبين أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ 4\leq f(x)$

اذن نحسب الفرق :

$$f(x)-4=\frac{5+4x^4}{x^4+1}-4=\frac{5+4x^4-4(x^4+1)}{x^4+1}=\frac{5+4x^4-4(x^4+1)}{x^4+1}=\frac{1}{x^4+1}\geq 0$$

ومنه : $\forall x\in\mathbb{R}\ 4\leq f(x)$

تمرين6: لتكن f الدالة العددية المعرفة على $I=[1;+\infty[$ بما يلي: $f(x)=-5x-\sqrt{x-1}$

بين أن الدالة f مكبورة بالعدد -5 على $I=[1;+\infty[$

الجواب :يكفي أن نبين أن : $f(x)\leq -5\ \forall x\in[1;+\infty[$

نعلم أن : $\sqrt{x-1}\geq 0\ \forall x\in[1;+\infty[$ يعني $-\sqrt{x-1}\leq 0$ $\quad(1)$

ولدينا : $-5x\leq -5\Leftrightarrow x\geq 1\Leftrightarrow x\in[1;+\infty[$ $\quad(2)$

من : (1) و(2) نحصل على : $-\sqrt{x-1}-5x\leq 0-5$

يعني $f(x)\leq -5$ ومنه f مكبورة على $I=[1;+\infty[$ بالعدد -5

تمرين7: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=\frac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3}$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f
2. بين أن الدالة f مكبورة بالعدد $\frac{7}{3}$ على $\mathbb{R}$.
3. بين أن الدالة f مصغورة بالعدد 1 على $\mathbb{R}$.
4. ماذا تستنتج بالنسبة للدالة f ؟

الأجوبة: 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+3x+3\neq0\}$

$\Delta=b^2-4ac=3^2-4\times3\times1=9-12=-3<0$

ومنه المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$

وبالتالي : $D_f=\mathbb{R}$

2) يكفي أن نبين أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)\le\frac{7}{3}$

اذن نحسب الفرق :

$$\frac{7}{3}-f(x)=\frac{7}{3}-\frac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3}=\frac{7(x^2+3x+3)-3(2x^2+7x+7)}{x^2+3x+3}$$

$$\frac{7}{3}-f(x)=\frac{7x^2+21x+21-6x^2-21x-21}{x^2+3x+3}=\frac{x^2}{x^2+3x+3}$$

بالنسبة للحدودية x^2+3x+3 وجدنا أن : $\Delta<0$

ومنه اشارتها هي اشارة $a=1$ أي أن : $x^2+3x+3>0$

وبما أنه لدينا : $x^2\ge0$ فان : $\frac{x^2}{x^2+3x+3}\ge0$

ومنه : $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)\le\frac{7}{3}$ بالتالي : f مكبورة بالعدد $\frac{7}{3}$ على $\mathbb{R}$.

3) يكفي أن نبين أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ 1\le f(x)$

اذن نحسب الفرق :

$$f(x)-1=\frac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3}-1=\frac{2x^2+7x+7-(x^2+3x+3)}{x^2+3x+3}$$

$$f(x)-1=\frac{2x^2+7x+7-x^2-3x-3}{x^2+3x+3}=\frac{x^2+4x+4}{x^2+3x+3}=\frac{(x+2)^2}{x^2+3x+3}$$

بالنسبة للحدودية x^2+3x+3 سبق أن وضحنا أن : $x^2+3x+3>0$

وبما أنه لدينا : $(x+2)^2\ge0$ فان : $\frac{(x+2)^2}{x^2+3x+3}\ge0$

ومنه: $\forall x\in\mathbb{R}\ 1\le f(x)$ بالتالي: الدالة f مصغورة بالعدد 1 على $\mathbb{R}$.

4) وجدنا أن : $1\le f(x)$ و $f(x)\le\frac{7}{3}$ $\forall x\in\mathbb{R}$

ومنه : $\forall x\in\mathbb{R}\ 1\le f(x)\le\frac{7}{3}$ اي أن f محدودة على $\mathbb{R}$

III. الدالة الدورية

نشاط : نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=\cos x$

قارن : $f(x)$ و $f(x+2\pi)$ $\forall x\in\mathbb{R}$

الجواب $f(x+2\pi)=\cos(x+2\pi)=\cos x=f(x)$

1. تعريف

لتكن f دالة عددية و D مجموعة تعريفها.

نقول إن f دالة دورية إذا وجد عدد حقيقي T موجب قطعا بحيث :

- إذا كانت $x\in D$ فان $x+T\in D$
- $\forall x\in D\ f(x+T)=f(x)$

مثال : الدوال : cos و sin دورية و دورهم $T=2\pi$

الدالة tan دالة دورية ودورها هو : $T=\pi$

تمرين8: نعتبر الدوال f و g المعرفة على $\mathbb{R}$

كالتالي : $f(x)=\cos 6x$ و $g(x)=\sin 7x$

1. بين أن الدالة f دورية و $\frac{\pi}{3}$ دور لها.
2. بين أن الدالة g دورية و $\frac{2\pi}{7}$ دور لها.

الأجوبة: 1) $D_f=\mathbb{R}$

- إذا كانت $x\in\mathbb{R}$ فان $x+\frac{\pi}{3}\in\mathbb{R}$
- $f\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos6\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos(6x+2\pi)=\cos6x=f(x)$

ومنه f دورية و $\frac{\pi}{3}$ دور لها.

2) $D_g=\mathbb{R}$

- إذا كانت $x\in\mathbb{R}$ فان $x+\frac{2\pi}{7}\in\mathbb{R}$
- $g\left(x+\frac{2\pi}{7}\right)=\sin7\left(x+\frac{2\pi}{7}\right)=\sin(7x+2\pi)=\sin7x=g(x)$

g دورية و $\frac{2\pi}{7}$ دور لها.

IV. مطاريف دالة عددية

نشاط1: لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=x^2+2$

1. أحسب : $f(0)$
2. بين أن : $f(0)\le f(x)$ على $\mathbb{R}$ وماذا تستنتج؟

الأجوبة: 1) $D_f=\mathbb{R}$ و $f(0)=2$

2) نعلم أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ 0\le x^2$

اذن: $0+2\le x^2+2$ يعني $2\le x^2+2$

يعني $\forall x\in\mathbb{R}\ f(0)\le f(x)$

نقول $f(0)$ هي قيمة دنيا للدالة f على $\mathbb{R}$

نشاط2: تكن f دالة معرفة ب: $f(x)=-2x^2+4x+1$.

1) أحسب $f(1)$ و تأكد أن : $f(x)=-2\left((x-1)^2-\frac{3}{2}\right)$

2) تأكد أن : $f(x)\le f(1)$ مهما تكن x من $\mathbb{R}$.

الأجوبة: 1) $D_f=\mathbb{R}$ و $f(1)=3$

2) نعلم أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ 0\le(x-1)^2$

اذن: $0-\frac{3}{2}\le(x-1)^2-\frac{3}{2}$ يعني $-\frac{3}{2}\le(x-1)^2-\frac{3}{2}$

يعني $(-2)\left(-\frac{3}{2}\right)\ge(-2)\left((x-1)^2-\frac{3}{2}\right)$ يعني $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)\le3$

يعني $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)\le f(1)$

نقول $f(1)$ هي قيمة قصوى للدالة f على $\mathbb{R}$

تعريف: لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I و a عنصرا من المجال I

- نقول إن $f(a)$ هي القيمة القصوى للدالة f على المجال I, إذا كان :

$\forall x\in I\ \ f(x)\le f(a)$

- نقول إن $f(a)$ هي القيمة الدنيا للدالة f على المجال I, إذا كان :

$\forall x\in I\ \ f(x)\ge f(a)$

تمرين9: لتكن f دالة معرفة ب: $f(x)=2x^2+2x+3$.

بين أن : $f(-1)$ هي قيمة دنيا للدالة f على $\mathbb{R}$

الجواب : يكفي أن نبين أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ f(-1)\le f(x)$

$f(-1)=2-2+3=3$

اذن نحسب الفرق :

$f(x)-f(-1)=2x^2+2x+1-3=2x^2+2x-2$

$\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times2\times2=4-16=-12<0$

اذن: اشارة الحدودية هي اشارة $a=2$ اذن : $2x^2+2x-2>0$

ومنه : $f(-1)\leq f(x)$

وبالتالي: $f(-1)$ هي القيمة الدنيا للدالة f على $\mathbb{R}$

تمرين10: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f
2. بين أن $f(1)$ هي القيمة الدنيا للدالة f على $\mathbb{R}$.
3. بين أن $f(-1)$ هي القيمة القصوى للدالة f على $\mathbb{R}$.

الأجوبة:1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+x+1\neq0\}$

$\Delta=b^2-4ac=1^2-4\times1\times1=1-4=-3<0$

ومنه المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$ وبالتالي : $D_f=\mathbb{R}$

2) يكفي أن نبين أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ f(1)\leq f(x)$

$$f(1)=\frac{1^2+1}{1^2+1+1}=\frac{2}{3}$$

$$f(x)-f(1)=\frac{x^2+1}{x^2+x+1}-\frac{2}{3}=\frac{3x^2+3-2(x^2+x+1)}{3(x^2+x+1)}=\frac{x^2-2x+1}{3(x^2+x+1)}$$

اذن : $f(x)-f(1)=\dfrac{(x-1)^2}{3(x^2+x+1)}$

بالنسبة للحدودية : x^2+x+1 وجدنا $\Delta<0$

اذن: اشارة الحدودية هي اشارة $a=1$ أي : $x^2+x+1>0$

ونعلم أن : $(x-1)^2\geq0$ اذن : $f(x)-f(1)\geq0$

ومنه : $\forall x\in\mathbb{R}\ f(1)\leq f(x)$

و بالتالي : $f(1)$ هي القيمة الدنيا للدالة f على $\mathbb{R}$.

3) يكفي أن نبين أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)\leq f(-1)$

$$f(-1)=\frac{(-1)^2+1}{(-1)^2-1+1}=2$$

$$f(-1)-f(x)=2-\frac{x^2+1}{x^2+x+1}=\frac{2(x^2+x+1)-(x^2+1)}{x^2+x+1}=\frac{x^2+2x+1}{x^2+x+1}$$

اذن : $f(-1)-f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x^2+x+1}$

بالنسبة للحدودية : x^2+x+1 سبق أن بينا أن : $x^2+x+1>0$

ونعلم أن : $(x+1)^2\geq0$ اذن : $f(-1)-f(x)\geq0$

ومنه : $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)\leq f(-1)$

و بالتالي : $f(-1)$ هي القيمة القصوى للدالة f على $\mathbb{R}$.

تمرين11: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كالتالي : $f(x)=x\sqrt{x^2+1}-x^2$ بين أن الدالة f مكبورة بالعدد $\frac{1}{2}$.

الجواب : يكفي أن نبين أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)\leq\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}-f(x)=\frac{1}{2}-x\sqrt{x^2+1}+x^2=\frac{1-2x\sqrt{x^2+1}+2x^2}{2}=\frac{1-2x\sqrt{x^2+1}+2x^2}{2}$$

$$\frac{1}{2}-f(x)=\frac{x^2+1-2x\sqrt{x^2+1}+x^2}{2}=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-2\sqrt{x^2+1}\times x+x^2}{2}=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^2}{2}\geq0$$

ومنه f مكبورة بالعدد $\frac{1}{2}$.

V. مقارنة دالتين

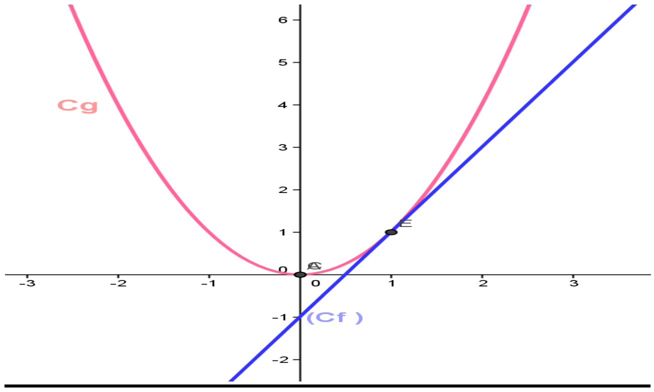
نشاط1: لتكن الدالتين العدديتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ بما يلي: $g(x)=x^2$ و $f(x)=2x-1$

1. مثل الدالتين f و g في نفس المعلم
2. أدرس اشارة الفرق: $g(x)-f(x)$ وماذا تستنتج مبيانيا؟

الأجوبة:1) $D_f=\mathbb{R}$ و $D_g=\mathbb{R}$ لأنهم دوال حدودية

x	0	1
$f(x)$	-1	1

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$	9	4	1	0	1	4	9



2) $g(x)-f(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2\geq0$ ومنه $g(x)\geq f(x)$

نقول أننا قمنا بمقارنة للدالتين f و g وجدنا أن : $g\geq f$

مبيانيا نلاحظ أن منحنى الدالة g يوجد فوق منحنى الدالة f

نشاط2: لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين كالتالي :

$g(x)=x^2$ و $f(x)=x$

1. حدد D_f و D_g
2. أرسم في معلم متعامد ممنظم منحنى الدالتين f و g
3. قارن f و g

تعريف: لتكن f و g دالتين عدديتين و D_f و D_g على التوالي مجموعة تعريفهما.

نقول إن f تساوي g ونكتب $f=g$ إذا وفقط إذا كان :

$D_g=D_f$ و $f(x)=g(x)$ $(\forall x\in D_f)$

تعريف: لتكن f و g دالتين عدديتين معرفتين على مجال I. نقول إن f أصغر من أو يساوي g على مجال I ونكتب $f\leq g$ إذا وفقط إذا كان: $(\forall x\in I)$ $f(x)\leq g(x)$

التأويل الهندسي : $f\leq g$ على مجال I يعني هندسيا أن منحنى الدالة f يوجد تحت منحنى الدالة g على المجال I .

ملحوظة :

- $f<g$ على المجال I

إذا وفقط إذا كان : $(\forall x\in I)$ $f(x)<g(x)$

- $f\geq0$ على المجال I إذا وفقط إذا كان : $(\forall x\in I)$ $f(x)\geq0$

تمرين12: تطبيقي: قارن الدالتين العدديتين f و g المعرفتين كالتالي :

$f(x)=4x^2$ و $g(x)=4x-1$

واعط تأويلا مبيانيا للنتيجة

الجواب : $D_f=\mathbb{R}$ و $D_g=\mathbb{R}$ لأنهم دوال حدودية

$f(x)-g(x)=4x^2-4x+1=(2x-1)^2\geq 0$

ومنه : $f\geq g$ بالتالي منحنى الدالة f يوجد فوق منحنى الدالة g على $\mathbb{R}$.

تمرين13: أدرس الوضع النسبي لمنحنى الدالة f و منحنى الدالة g حيث

$f(x)=x+\frac{1}{x+1}$ و $g(x)=x$

الجواب : $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$ و $D_g=\mathbb{R}$

$f(x)-g(x)=x+\frac{1}{x+1}-x=\frac{1}{x+1}$

ندرس اشارة $x+1$:

الحالة 1: اذاكانت $x>-1$ فان $f\geq g$ بالتالي منحنى الدالة f يوجد فوق منحنى الدالة g على $]-1;+\infty[$.

الحالة2: اذاكانت $x<-1$ فان $g\geq f$ بالتالي منحنى الدالة f يوجد تحت منحنى الدالة g على $]-\infty;-1[$.

تمرين14: نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ كالتالي :

$f(x)=x^2-3x+5$ و $g(x)=-x^2+2x+2$

أدرس الوضع النسبي لمنحنى الدالة f و منحنى الدالة g

الجواب : $D_f=\mathbb{R}$ و $D_g=\mathbb{R}$

$f(x)-g(x)=x^2-3x+5-(-x^2+2x+2)=2x^2-5x+3$

ندرس اشارة $2x^2-5x+3$:

$a=2$ و $b=-5$ و $c=3$

$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times2\times3=25-24=1>0$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان لهذه الحدودية جذرين هما:

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\frac{5+1}{2\times2}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$ و $x_2=\frac{5-1}{2\times2}=\frac{4}{4}=1$

x	$-\infty$		1		$3/2$		$+\infty$
$2x2-5x+3$		+	0	−	0	+	

الحالة1: اذاكانت $x\geq 3/2$ أو $x\leq 1$ فان $f\geq g$ بالتالي منحنى الدالة f يوجد فوق منحنى الدالة g على $]-\infty,1]\cup\left[\frac{3}{2},+\infty\right[$.

الحالة2: اذاكانت $1\leq x\leq\frac{3}{2}$ فان $g\geq f$ بالتالي منحنى الدالة f يوجد تحت منحنى الدالة g على $\left[1,\frac{3}{2}\right]$.

VI. مركب دالتين

نشاط1: لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين كالتالي :

$f(x)=x+1$ و $g(x)=x^2$

حدد : $(g\circ f)(x)=g(f(x))$ و $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ ماذا تلاحظ ؟

الجواب : $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x+1)=(x+1)^2=x^2+2x+1$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2)=x^2+1$

نلاحظ: $g\circ f\neq f\circ g$

تمرين15: لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين كالتالي :

$f(x)=-x+1$ و $g(x)=x^3-x$ حدد $(g\circ f)(x)$

الجواب : $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(-x+1)=(-x+1)^3-(-x+1)$

$(g\circ f)(x)=(1-x)^3-(-x+1)=1^3-3\times1\times x+3\times1\times x^2-x^3+x-1$

$(g\circ f)(x)=1^3-3x+3x^2-x^3+x-1=-x^3+3x^2-2x$

تعريف: لتكن f و g دالتين عدديتين و D_f و D_g على التوالي مجموعة تعريفهما.

$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x\in D_f \text{ و } f(x)\in D_g\}$

الدالة العددية h المعرفة على $D_{g\circ f}$ بما يلي : $h(x)=g(f(x))$ تسمى مركب الدالتين f و g في هذا الترتيب ويرمز لها بالرمز $g\circ f$

ومنه : $\forall x\in D_{g\circ f}\quad (g\circ f)(x)=g(f(x))$

تمرين16: لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين كالتالي :

$f(x)=x-1$ و $g(x)=\sqrt{x}$

حدد : D_f و D_g و $D_{g\circ f}$ ثم أحسب $(g\circ f)(x)\quad\forall x\in D_{g\circ f}$

الجواب : $D_f=\mathbb{R}$ و $D_g=\{x\in\mathbb{R}/x\geq 0\}=[0,+\infty[$

$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x\in D_f \text{ و } f(x)\in D_g\}$

$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x\in\mathbb{R} \text{ و } f(x)\in[0,+\infty[\}$

$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x\in\mathbb{R} \text{ و } x+1\in[0,+\infty[\}$

$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x\geq-1\}\Leftrightarrow D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x+1\geq 0\}$

$D_{g\circ f}=[-1;+\infty[$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x-1)=\sqrt{x-1}$

تمرين17: لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين كالتالي :

$f(x)=x-3$ و $g(x)=\sqrt{x+1}$

حدد : D_f و D_g و $D_{g\circ f}$ ثم أحسب $(g\circ f)(x)\quad\forall x\in D_{g\circ f}$

الجواب : $D_f=\mathbb{R}$

و $D_g=\{x\in\mathbb{R}/x+1\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R}/x\geq-1\}=[-1,+\infty[$

$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x\in D_f \text{ و } f(x)\in D_g\}$

$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x\in\mathbb{R} \text{ و } f(x)\in[1,+\infty[\}$

$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x-3\in[-1,+\infty[\}$

$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x\geq 2\}\Leftrightarrow D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x-3\geq-1\}$

$D_{g\circ f}=[2;+\infty[$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x-3)=\sqrt{x-3+1}=\sqrt{x-2}$

VII. رتابة دالة عددية

نشاط1: لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين كالتالي :

$f(x)=4x-3$ و $g(x)=-3x+2$

أدرس رتابة f و g

أجوبة :

1) $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

ليكن: $x_1 \in \mathbb{R}$ و $x_2 \in \mathbb{R}$ بحيث $x_1 < x_2$

اذن: $4x_1 < 4x_2$ اذن: $4x_1 - 3 < 4x_2 - 3$

اذن: $f(x_1) < f(x_2)$

ومنه الدالة f تزايدية على $\mathbb{R}$

2) $D_g = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

ليكن: $x_1 \in \mathbb{R}$ و $x_2 \in \mathbb{R}$ بحيث $x_1 < x_2$

اذن: $-3x_1 > -3x_2$ اذن: $-3x_1 + 2 > -3x_2 + 2$ اذن:

$g(x_1) > g(x_2)$

ومنه الدالة g تناقصية على $\mathbb{R}$

نشاط2: لتكن f الدالة العددية المعرفة كالتالي: $f(x) = 2x^2$

1)حدد D_f

2) أدرس رتابة f على كل من المجالين: $[0;+\infty[$ و $]-\infty;0]$

3)حدد جدول تغيرات

أجوبة: 1) $D_f = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

2) أ) دراسة رتابة الدالة f على المجال $[0;+\infty[$:

ليكن: $x_1 \in [0;+\infty[$ و $x_2 \in [0;+\infty[$ بحيث $x_1 < x_2$

اذن: $x_1^2 < x_2^2$ ومنه $2x_1^2 < 2x_2^2$ أي $f(x_1) < f(x_2)$

ومنه الدالة f تزايدية على $[0;+\infty[$

ب) دراسة رتابة الدالة f على المجال $]-\infty;0]$:

ليكن: $x_1 \in]-\infty;0]$ و $x_2 \in]-\infty;0]$ بحيث $x_1 < x_2$

اذن: $x_1^2 > x_2^2$ ومنه $2x_1^2 > 2x_2^2$ أي $f(x_1) > f(x_2)$

ومنه الدالة f تناقصية على $]-\infty;0]$

3)حدد جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

منحى تغيرات دالة عددية

تعريف: لتكن f دالة عددية و I مجالا ضمن مجموعة تعريفها.

• f تزايدية قطعا على المجال I إذا وفقط إذا كان: $(\forall (x_1,x_2) \in I^2)\ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$

• f تناقصية قطعا على المجال I إذا وفقط إذا كان: $(\forall (x_1,x_2) \in I^2)\ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$

• f ثابتة على المجال I إذا وفقط إذا كان: $(\forall (x_1,x_2) \in I^2)\ f(x_1) = g(x_2)$

ملحوظة: يمكن دراسة رتابة دالة f على مجال I بدراسة إشارة معدل التغير: $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

مع x_1 و x_2 عنصرين مختلفين من I

•نقول إن f دالة رتيبة على I إذا كانت f تزايدية قطعا أو تناقصية قطعا على مجال I.

خاصية: لتكن f دالة عددية مجموعة تعريفها D_f متماثلة بالنسبة للصفر.

ليكن I مجالا من $\mathbb{R}^+$ ضمن D_f و I' مماثل I بالنسبة للصفر

1)إذا كانت f دالة زوجية فان:

▪ f تزايدية قطعا على المجال I إذا وفقط إذا كانت f تناقصية قطعا على المجال I'

▪ f تناقصية قطعا على المجال I إذا وفقط إذا كانت f تزايدية قطعا على المجال I'

2)إذا كانت f دالة فردية فان:

f لها نفس الرتابة على كل من المجالين I و I'

VIII. رتابة مركب داالتين:

خاصية: لتكن f و g دالتين عدديتين معرفتين على التوالي على المجالين I و J بحيث: $f(x) \in J$ $(\forall x \in I)$ لدينا:

▪إذا كانت f تزايدية قطعا على I و g تزايدية قطعا على J فان: $g \circ f$ تزايدية قطعا على I

▪إذا كانت f تناقصية قطعا على I و g تناقصية قطعا على J فان: $g \circ f$ تزايدية قطعا على I

▪إذا كانت f تزايدية قطعا على I و g تناقصية قطعا على J فان: $g \circ f$ تناقصية قطعا على I

▪إذا كانت f تناقصية قطعا على I و g تزايدية قطعا على J فان: $g \circ f$ تناقصية قطعا على I

IX. التمثيل المبياني للدالتين $x \to \sqrt{x+a}$ و $x \to ax^3$:

مثال1: لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي: $f(x) = \sqrt{x+2}$

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f

2. أدرس رتابة الدالة f على D_f وحدد جدول تغيرات f

3. أنشئ التمثيل المبياني للدالة f في معلم متعامد ممنظم .

الجواب: 1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x + 2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -2\} = [-2, +\infty[$

2) ليكن: $x_1 \in [-2;+\infty[$ و $x_2 \in [-2;+\infty[$ بحيث $x_1 < x_2$

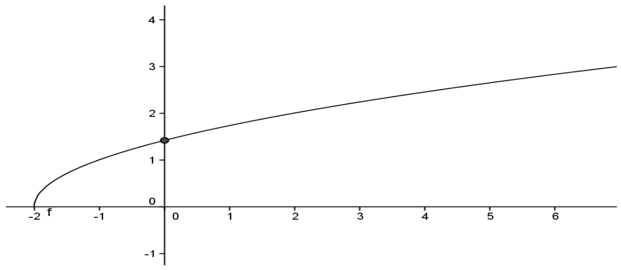
اذن: $x_1 + 2 < x_2 + 2$ ومنه $\sqrt{x_1+2} < \sqrt{x_2+2}$ أي $f(x_1) < f(x_2)$

ومنه الدالة f تزايدية على $[-2;+\infty[$

3)

x	-2	$+\infty$
$f(x)$	0 $\nearrow$	$+\infty$

x	-2	-1	0	2	7
$f(x)$	0	1	$\sqrt{2}$	2	3



مثال2: لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي: $f(x) = \dfrac{1}{4}x^3$

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f و بين أن الدالة f تزايدية قطعا على D_f

2. حدد جدول تغيرات f

3. أنشئ التمثيل المبياني للدالة f في معلم متعامد ممنظم .

الجواب :1) $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

ليكن : $x_1\in\mathbb{R}$ و $x_2\in\mathbb{R}$ بحيث $x_1<x_2$

اذن: $x_1^3<x_2^3$ ومنه $\frac{1}{4}\times x_1^3<\frac{1}{4}\times x_2^3$ أي $f(x_1)<f(x_2)$

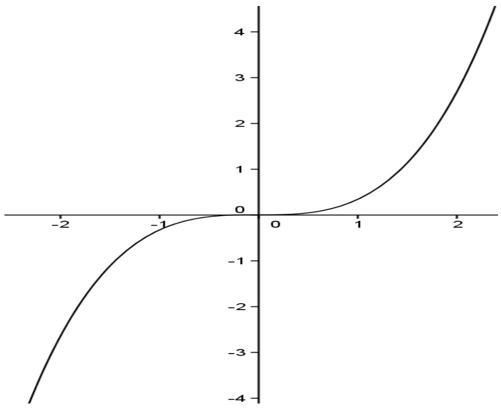
ومنه الدالة f تزايدية على $\mathbb{R}$

2)

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	↗

3)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6.5	-2	-1/4	0	1/4	2	6.5



تمارين للبحث:

تمرين1: نعتبر الدالتين f و g المعرفتين كالتالي :

$$g(x)=\frac{2x+1}{x-2} \quad \text{و} \quad f(x)=\frac{1}{x}$$

1. حدد $D_{g\circ f}$ حيز تعريف الدالة $g\circ f$
2. حدد صيغة الدالة $g\circ f$

تمرين2: نعتبر الدالتين f و g المعرفتين كالتالي : $f(x)=x^2+2$ و $g(x)=\sqrt{x}$

1. حدد صيغة الدالة $g\circ f$
2. تأكد أن الدالة $g\circ f$ زوجية
3. أدرس رتابة كل من الدالتين f و g

تمرين3:لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي : $f(x)=-\frac{1}{2}x^3$

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f
2. بين أن الدالة f تناقصية قطعا على D_f و حدد جدول تغيرات f
3. أنشئ التمثيل المبياني للدالة f في معلم متعامد ممنظم .